

# Elemente de bază în evaluarea incertitudinii de măsurare

Sonia Gaiță

Institutul Național de Metrologie

Laboratorul Termometrie

# Subiecte

- ✦ Concepte și termeni
- ✦ Modelarea măsurării
- ✦ Evaluarea de tip A
- ✦ Evaluarea de tip B
- ✦ Evaluarea incertitudinii standard compuse
- ✦ Bilanțul incertitudinii
- ✦ Evaluarea incertitudinii extinse

# Incertitudinea de măsurare (I)

- ★ *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (ISO-GUM).*
  - Ghid internațional – 16 ani de dezvoltare și revizuire de către 7 organizații:
    - ISO, BIPM, IEC, OIML, IUPAP, IUPAC, IFCC
  - Asigură compatibilitatea între laboratoarele de etalonare din întreaga lume
- ★ *SR 13 434 - Ghid pentru evaluarea și exprimarea incertitudinii de măsurare*

# Incertitudinea de măsurare (II)

- ☀ Ce este incertitudinea de măsurare?
  - ☀ Parametru asociat cu rezultatul unei măsurări, care caracterizează dispersia valorilor ce pot fi atribuite, în mod rezonabil, măsurandului
- ☀ Cum apare incertitudinea de măsurare?
- ☀ De ce este importantă ?

# Modelarea măsurării

- Se definește măsurandul sau mărimea de ieșire,  $Y$  – mărimea supusă măsurării
- Se determină modelul matematic al măsurării între măsurand și cele  $N$  mărimi de intrare,  $X_1, X_2, \dots, X_N$ :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

- Valorile mărimilor de intrare sunt denumite **estimații de intrare** și sunt notate cu  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .
- Rezultatul măsurării,  $y$ , denumit **estimație de ieșire**, se obține din ecuația (1):

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (2)$$

- Exemplu:**

- $R = R_0 [1 + \alpha (t - t_0)].$
- $P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R = V^2 / \{ R_0 [1 + \alpha (t - t_0)] \}$

# Evaluarea incertitudinii standard $u(x_i)$

## ☀ Metodă de evaluare de Tip A

- Metodă de evaluare bazată pe analiza statistică a unei serii de  $n$  observații repetate și independente

## ☀ Metodă de evaluare de Tip B

- Metodă de evaluare bazată pe alte metode decât analiza statistică a șirurilor de observații

- ☀ **ISO 3534-1:1993**, *Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms* [Statistică- Vocabular și simboluri. Partea 1: Probabilitate și termeni statistici generali], International Organization for Standardization (Geneva, Switzerland).

# Termeni statistici

☀ Rezultatul măsurării trebuie perceput ca o distribuție a valorilor posibile ce pot fi atribuite măsurandului:

- Variabilă aleatoare
- Distribuție de probabilitate a unei variabile aleatoare

☀ Parametrii distribuției de probabilitate:

- Media teoretică:

$$\mu_t = \int x f(x) dx$$

- Abaterea standard:

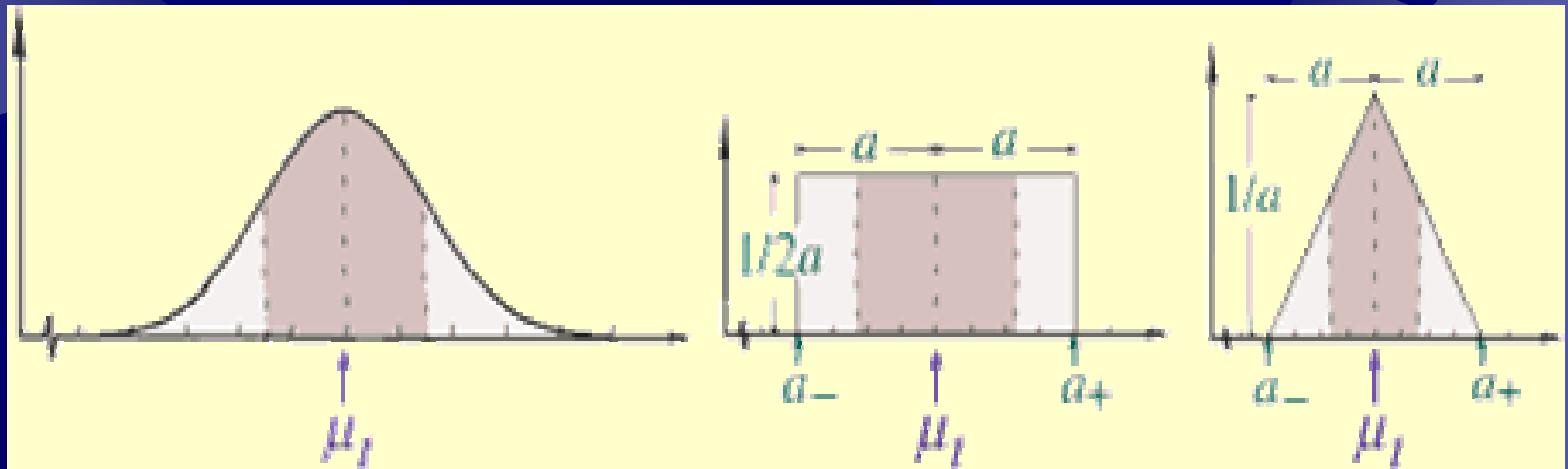
$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ , unde  $\sigma^2$  este varianța variabilei aleatoare.

- Varianța:

$$\sigma^2(x) = \int (x - \mu_t)^2 f(x) dx$$

# Distribuții de probabilitate

- ☀ Distribuție normală
- ☀ Distribuție dreptunghiulară
- ☀ Distribuție triunghiulară





# Incertitudine standard

- ☀ Incertitudinea standard este incertitudinea rezultatului unei măsurări exprimată printr-o abatere standard
  - se definește ca rădăcina pătrată a varianței estimate.
- ☀ Incertitudinea de măsurare asociată cu estimația de intrare,  $x_i$ , este denumită **incertitudine standard** și este notată cu  $u(x_i)$ .
- ☀ **Incertitudinea standard de Tip A**
  - se obține printr-o evaluare de Tip A
  - se calculează pe baza unui șir de observații repetate
  - este abatere standard estimată statistic  $s$
- ☀ **Incertitudinea standard de Tip B**
  - se obține printr-o evaluare de Tip B
  - se definește ca **estimația** abaterii standard obținute dintr-o distribuție de probabilitate presupusă

# Evaluarea de Tip A

- ✦ Mărimea de intrare,  $X_i$  și  $n$  observații repetate și independente  $X_{i,k}$
- ✦ Estimația de intrare  $x_i$  este media aritmetică:

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k}$$

- ✦ Incertitudinea standard  $u(x_i)$  asociată lui  $x_i$  este abaterea standard experimentală a mediei:

$$u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \left( \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_i)^2 \right)^{1/2}$$

# Evaluarea de Tip B

## ☀ Informații relevante disponibile

- ☀ rezultate ale unor măsurări anterioare;
- ☀ experiență sau cunoștințe generale referitoare la comportarea și caracteristicile materialelor și mijloacelor de măsurare utilizate;
- ☀ specificații ale fabricanților de mijloace de măsurare;
- ☀ date specificate în certificate de etalonare sau alte certificate;
- ☀ incertitudine atribuită valorilor de referință preluate din lucrări și manuale.

# Exemple de evaluări de Tip B (I)

- ✦ Incertitudine obținută din-o sursă externă
  - ✦ Multiplu al unei abateri standard
    - incertitudinea standard  $u(x_i)$  este egală cu câtul dintre valoarea menționată și factorul de multiplicare
  - ✦ Interval corespunzător unui nivel de încredere de 95 % sau 99 %
    - se presupune că a fost folosită o distribuție normală
    - incertitudinea standard  $u(x_i)$  este egală cu câtul dintre incertitudinea specificată și factorul corespunzător pentru distribuția normală: 1,960 sau 2,576

# Exemple de evaluări de Tip B (II)

## ✦ Incertitudine obținută dintr-o distribuție de probabilitate subiectivă

### ✦ Distribuție dreptunghiulară

- probabilitatea ca valorile lui  $X_i$  să se afle între limita inferioară  $a_-$  și superioară  $a_+$  este egală cu 1
- $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ , unde  $a = (a_+ - a_-)/2$

### ✦ Distribuție triunghiulară

- Valorile apropiate de centru sunt mai probabile decât cele apropiate de limite
- $u(x_i) = a/\sqrt{6}$ , unde  $a = (a_+ - a_-)/2$

# Incertitudinea standard compusă $u_c(y)$

## ☀ Mărimi de intrare corelate

- ☀ Incertitudinea standard compusă a estimației de ieșire este rădăcina pătrată a varianței compuse estimate  $u_c^2(y)$ :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

- ☀ Legea de propagare a incertitudinii, în care
  - ☀  $\partial f / \partial x_i = c_i$  – coeficienți de sensibilitate
  - ☀  $u_i(y) = c_i u(x_i)$  – contribuția la incertitudinea standard compusă
  - ☀  $u(x_i, x_j)$  – covarianța estimată

# Incertitudinea standard compusă $u_c(y)$

- ☀ Mărimi de intrare necorelate

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

Exemplu:

- ☀ Ecuația de măsurare:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_N X_N$$

- ☀ Rezultatul măsurării:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N$$

- ☀ Incertitudinea standard compusă:

$$u_c^2(y) = a_1^2 u^2(x_1) + a_2^2 u^2(x_2) + \dots + a_N^2 u^2(x_N)$$

# Bilanțul incertitudinii

Mărimea	Estimația	Incertitudinea standard	Distribuția de probabilitate	Coeficientul de sensibilitate	Contribuția la incertitudinea standard compusă
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$		$c_i$	$u_i(y) = c_i u(x_i)$
$X_1$	$x_1$	$u(x_1)$		$c_1$	$u_1(y)$
$X_2$	$x_2$	$u(x_2)$		$c_2$	$u_2(y)$
·	·	·		·	·
·	·	·		·	·
·	·	·		·	·
$X_N$	$x_N$	$u(x_N)$		$c_N$	$u_N(y)$
$Y$	$y$				$u_c(y)$



# Incertitudinea extinsă

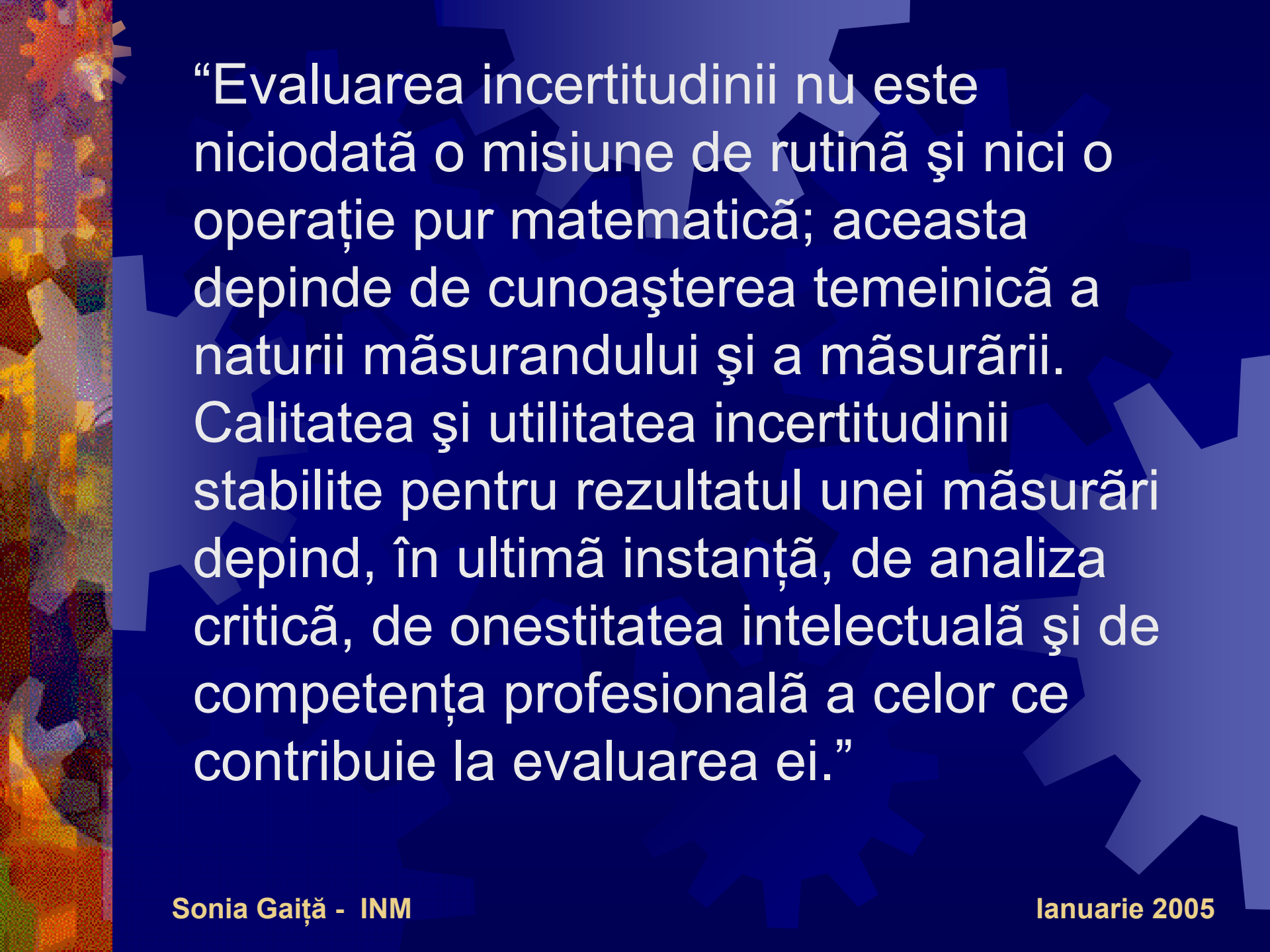
- ✱ Incertitudinea extinsă  $U$  se obține înmulțind incertitudinea standard compusă  $u_c(y)$  cu un factor de extindere  $k$ :

$$U = k u_c(y) .$$

- ✱ În general,  $k$  este cuprins între 2 și 3.
- ✱ Pentru o distribuție de probabilitate aproximativ normală:
  - ✱ când  $k = 2$ , intervalul  $y \pm U$  are un nivel de încredere de aproximativ 95 %
  - ✱ când  $k = 3$ , intervalul  $y \pm U$  are un nivel de încredere de aproximativ 99 %.

# Procedura de evaluare

- ★ Se stabilește funcția de modelare:  
 $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ .
- ★ Se determină estimațiile de intrare  $x_i$ .
- ★ Se evaluează incertitudinea standard  $u(x_i)$ , printr-o evaluare de Tip A sau de Tip B, după caz.
- ★ Se evaluează covarianțele asociate cu toate estimațiile de intrare care sunt corelate.
- ★ Se calculează rezultatul măsurării  $y$ .
- ★ Se determină incertitudinea standard compusă  $u_c(y)$ .
- ★ Dacă este necesar, se determină incertitudinea extinsă  $U$ .
- ★ Se raportează rezultatul măsurării:  
 $y \pm u_c(y)$  sau  $y \pm U$ .

The background features a dark blue field with several large, semi-transparent gears of varying shades of blue. On the left side, there is a vertical strip with a colorful, abstract, and somewhat pixelated texture in shades of orange, yellow, and brown. The text is centered in the blue area.

“Evaluarea incertitudinii nu este niciodată o misiune de rutină și nici o operație pur matematică; aceasta depinde de cunoașterea temeinică a naturii măsurandului și a măsurării. Calitatea și utilitatea incertitudinii stabilite pentru rezultatul unei măsurări depind, în ultimă instanță, de analiza critică, de onestitatea intelectuală și de competența profesională a celor ce contribuie la evaluarea ei.”